

I - Utilisation des courbes en topologie :1) Chemins et connexité par arcs

On considère (E, d) un espace métrique.

Définition 1: On appelle chemin entre deux points a et b de E une application continue $\gamma: [0, 1] \rightarrow E$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. On peut alors définir une relation d'équivalence entre deux points de E a et b si il existe un chemin reliant a et b .

Exemple 2: Sur un espace vectoriel normé E , on peut relier deux points de celui-ci x et y avec le chemin $\gamma: t \in [0, 1] \mapsto xt + (1-t)y$.

Définition 3: On dit qu'un espace métrique (E, d) est connexe par arcs si pour tout $(x, y) \in E^2$, il existe un chemin reliant x et y .

Exemple 4: On en déduit que les espaces vectoriels normés sont connexes par arcs, ainsi que les ensembles convexes.

Théorème 5: La connexité par arcs d'un espace métrique (E, d) entraîne la connexité de celui-ci.

Remarque 6: Ceci est utile pour démontrer la connexité d'un ensemble, il est souvent plus facile de montrer qu'il est connexe par arcs. La réciproque est vraie dans certains cas particuliers, comme si X un ouvert d'un espace vectoriel normé.

2) Composantes connexes

Définition 7: Les classes d'équivalences de la relation d'équivalence posée dans la définition 1 sont appelées les composantes connexes par arcs. Elles diffèrent des composantes connexes généralement.

Proposition 8: Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ un homéomorphisme. Alors f échange les composantes connexes par arcs.

Application 9: On en déduit que \mathbb{R}^2 n'est pas homéomorphe à \mathbb{R} .

3) Courbes de Jordan

Définition 10: Une courbe de Jordan est une application continue $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ fermée sans point double, c'est-à-dire: $\gamma(1) = \gamma(0)$; $0 \leq s < t \leq 1$ et $\gamma(s) = \gamma(t) \Rightarrow s = 0, t = 1$. $\gamma([0, 1])$ s'appelle l'image de γ .

Exemple 11: La courbe $e(t) = e^{2i\pi t}$ a pour image le cercle unité \mathbb{I} .

Théorème 12: Soit γ une courbe de Jordan d'image S . Alors S est homéomorphe à \mathbb{I} .

Remarque 13: Cela signifie que l'on peut voir toute courbe de Jordan comme une déformation du cercle unité par un homéomorphisme.

Théorème (de Jordan-Schönflies) 14: Soit γ une courbe de Jordan d'image S . Alors:

(i) S^c (complémentaire de S) a exactement deux composantes connexes: l'une bornée C_0 , l'autre non bornée C_∞ .

(ii) $\partial C_0 = \partial C_\infty = S$

Application (Énigme des 3 maisons) 15: Sur le dessin en annexe, il est impossible de relier chaque maison à l'eau, l'électricité et le gaz sans qu'aucune des courbes ne se croisent. Ceci est due au théorème de Jordan.

II - Utilisation des courbes en analyse complexe

1) Intégration complexe

On considère $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert de \mathbb{C} .

Définition 16: On appelle arc toute application continue γ d'un intervalle compact $[a, b]$ de \mathbb{R} dans Ω . Si γ est de classe C^1 , on appelle alors cet arc un chemin. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, alors cet arc est appelé un lacet.

Dans la suite, on considère toujours des chemins.

Exemple 17: Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Le lacet $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0 + re^{it}$ est appelé le cercle de centre z_0 et de rayon r , parcourus dans le sens direct.

Définition 18: Soient $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ un chemin et $f \in C^0(\Omega)$. L'intégrale de f sur γ , notée $\int_\gamma f(z) dz$, est définie par:

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Exemple 19: Avec le lacet de l'exemple précédent, on obtient que:

$$\int_\gamma f(z) dz = ir \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{it} dt$$

Remarque 20: En notant $\|f\|_\infty = \sup \{ |f(z)|, z \in \Omega \}$ et $\text{long}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$, on obtient $|\int_\gamma f(z) dz| \leq \|f\|_\infty \text{long}(\gamma)$

Définition 21: Soient $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ un lacet et $U = \mathbb{C} \setminus \text{im}(\gamma)$

Pour $z \in U$, on pose:

$$\text{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt$$

Remarque 22: L'application $z \mapsto \text{ind}_\gamma(z)$ est à valeurs dans \mathbb{Z} . On dit que $\text{ind}_\gamma(z)$ est l'indice de z par rapport à γ et cela correspond intuitivement au nombre de tours effectué par γ autour du point z .

Théorème 23: Soit $f \in C^0(\Omega)$. Les conditions suivantes sont équivalentes: (i) f possède une primitive dans Ω . (ii) Pour tout lacet γ dans Ω , on a $\int_\gamma f(z) dz = 0$.

Théorème 24: Soient U un ouvert convexe de \mathbb{C} et f une fonction continue sur U telle que $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ pour tout triangle $\Delta \subset U$. Alors f possède une primitive dans U .

Théorème (De Goursat) 25: Soit $w \in \Omega$, et f une fonction continue et holomorphe sur $\Omega \setminus \{w\}$. Pour tout triangle $\Delta \subset U$, on a:

$$\int_{\partial\Delta} f(\xi) d\xi = 0$$

Corollaire (Formule de Cauchy pour un convexe) 26: Soit γ un lacet dans un ouvert convexe U de \mathbb{C} , $z \in U \setminus \text{im}(\gamma)$, $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors:

$$f(z) \text{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

2) Application aux calculs d'intégrales

Définition 27: Soit $a \in \mathbb{C}$. Si f est une fonction holomorphe dans une couronne centrée en a , le résidu de f en a est le coefficient de $\frac{1}{z-a}$ dans le développement de Laurent de f au point a . On le note $\text{Res}(f, a)$.

Théorème (des résidus) 28: Soit U un ouvert convexe de \mathbb{C} , a_1, \dots, a_n des points deux à deux distincts de U et $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$. On suppose que chaque a_k est un pôle de f . Si γ est un chemin fermé dans U dont l'image ne contient aucun des a_k , on a:

$$\int_\gamma f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{ind}_\gamma(a_k) \text{Res}(f, a_k)$$

Remarque 28: Ce théorème est un puissant outils pour calculer des intégrales.

Exemple 30: En utilisant le théorème des résidus, on calcule l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^6} = \frac{\pi}{3}$

3) Une application matricielle

Définition 31: Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante par ligne (respectivement par colonne) si $\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{i,i}| > \sum_{s \neq i} |a_{i,s}|$ (respectivement si $\forall s \in \{1, \dots, n\}, |a_{s,s}| > \sum_{i \neq s} |a_{i,s}|$).

Théorème (De Gershgorin-Hadamard) 32: (DEV 1)

(i) Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante par ligne ou par colonne est inversible.

(ii) Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^n B(a_{i,i}, \sum_{s \neq i} |a_{i,s}|)$
 $\sigma(A) \subset \bigcup_{s=1}^n B(a_{s,s}, \sum_{i \neq s} |a_{i,s}|)$.

De plus, dans chaque composante connexe d'une des deux réunions, le nombre de valeurs propres de A comptées avec multiplicité algébrique est égal au nombre de coefficients de la diagonale (avec multiplicité)

Remarque 33: Ce théorème nous fournit des informations sur la localisation des valeurs propres d'une matrice.

III - Utilisation des courbes pour les équations différentielles

1) Cas du pendule simple

Considérons le pendule simple ou son mouvement est régi par l'équation: $l \frac{d^2 \theta}{dt^2} + g \sin(\theta) = 0$
 où l la longueur de la corde, g la constante d'accélération de la pesanteur et θ l'angle entre le pendule et l'axe des x .

Sans chercher à calculer les solutions, on peut tracer et interpréter le portrait de phase, grâce à l'intégrale première

$H(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - g \cos(\theta)$. On note $E_2 = \{(\theta, \dot{\theta}) \mid H(\theta, \dot{\theta}) = c\}$ les ensembles de niveau c de H . On voit que $E_{+1} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(2\pi k, 0)\}$. Pour $-1 < c < 1$, on voit que E_2 est une réunion de courbes fermées disjointes. Pour $c > 1$, E_2 est formé de deux courbes disjointes et symétriques par rapport à l'axe des θ aux points $(\pi + 2\pi k, 0)$.

Ceci nous permet de voir tous les types de solutions possibles:

- point d'équilibre du pendule en bas ($\theta = 2\pi k$)
- point d'équilibre en haut ($\theta = \pi + 2\pi k$)
- oscillations autour de l'équilibre du bas ($-1 < c < 1$)
- rotation complète ($c > 1$)

Les solutions sont ici périodiques car nous avons négligé les frottements ce qui fait que le pendule ne s'arrête jamais. Pour finir, le cas des orbites dans E_{+1} ne sont pas très réalistes car le mouvement d'un pendule partant initialement d'un point θ_0 à une vitesse $\dot{\theta}_0$ met un temps infini à atteindre l'équilibre du haut.

2) Un modèle autonome: le système proie-prédateur de Lotka-Volterra:

Exemple 34: (DEV 2) On considère le système suivant dit proie-prédateur de Lotka-Volterra.

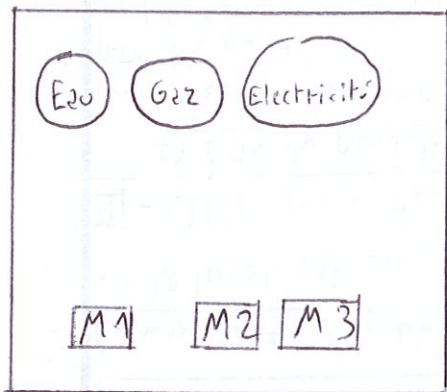
$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}$$

Avec $a, b, c, d > 0$ et comme condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ tel que $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

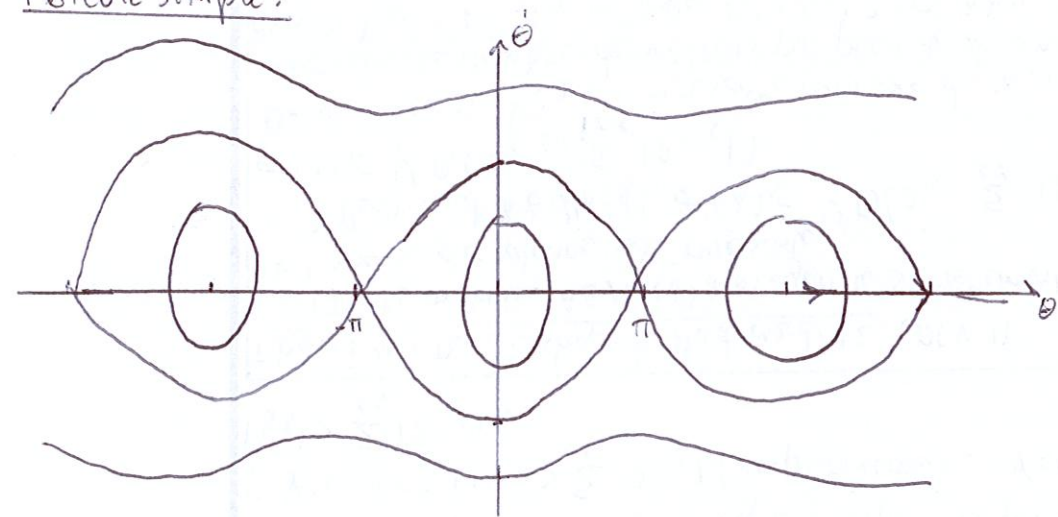
Alors ce système de Cauchy admet une solution globale et périodique. De plus, nous pouvons prédire l'allure de la courbe $t \mapsto (x(t), y(t))$

Annexus:

App 15:

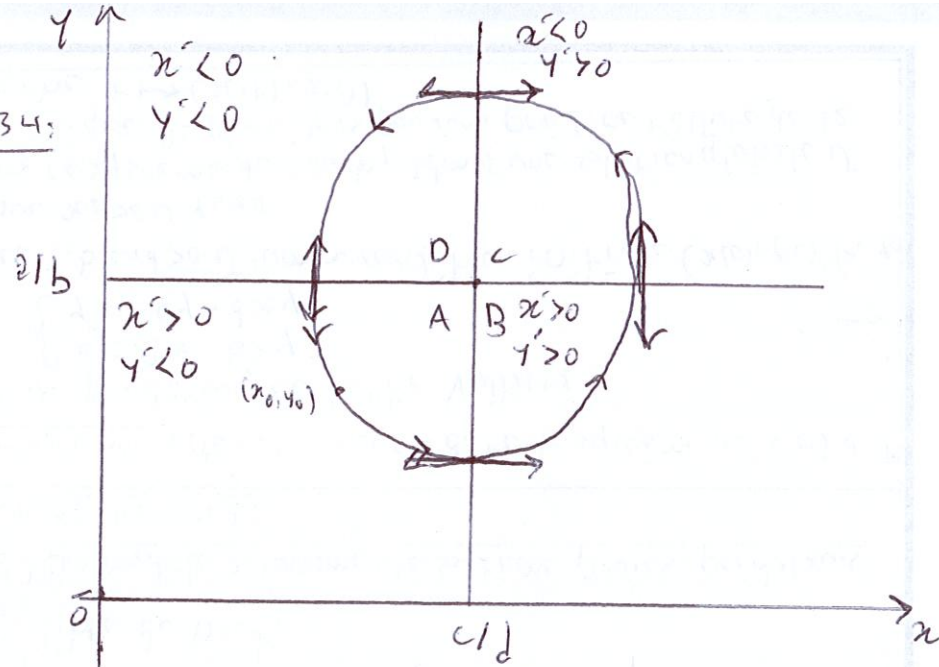


Pendule simple:



Portrait de phase du pendule simple pour $g/l=1$

Exemple 34:



Références:

- Topologie de Hervé Quiffelec
- Analyse complexe pour la licence 3 de Patricia Trouel
- Analyse complexe de Eric Amer et Etienne Matheron
- Calcul différentiel et équations différentielles de Sylvie Benzoni-Gevze.
- Outils X-ENS Analyse tome 4
- Matrices - Theory and Applications de Denis Serre.